Hausübung III zur Vorlesung ELEKTRODYNAMIK — SoSe 2011

Prof. Dr. Manfred Lein

Abgabe 02. Mai 2011 vor der Vorlesung — PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

---

RANDWERTPROBLEME IN DER ELEKTROSTATIK

In der Vorlesung wurden der Gaußsche Satz, das elektrostatische Potential, die Laplace- und die Poisson-Gleichung behandelt und sodann die Lösung von Randwertproblemen angegangen. Dies soll in dieser Übung vertieft werden.

[H7] *Faradayscher Käfig* **[7 Punkte]**

Bekanntlich schützt ein Faradayscher Käfig vor elektromagnetischen Feldern, so auch vor einem Blitzeinschlag. Warum aber eigentlich? Für den Fall statischer elektrischer Felder können wir dies bereits verstehen.

Betrachten Sie einen ladungsfreien Hohlraum, der von einer leitenden Oberfläche umschlossen ist. Zeigen Sie, dass das Feld im Innern identisch verschwindet. *Hinweis*: Überlegen Sie, welches Randwertproblem einen Faradayschen Käfig beschreibt.

[H8] *Yukawa-Potential* **[$3 + 5 + 4 = 12$ Punkte]**

Betrachten Sie das folgende elektrostatische Potential, das so genannte Yukawa-Potential, das in der Kern- und Elementarteilchenphysik eine große Rolle spielt:

$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{e}^{-\alpha r}}{r},$$

wobei $r = |\vec{r}|$ und $\alpha > 0$ ist. Für kleine r gleicht es annähernd dem Coulomb-Potential einer Punktladung Q. (Worin unterscheidet es sich vom Coulomb-Potential, besonders wenn r groß wird?)

(a) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$.

(b) Berechnen Sie die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$. Verwenden Sie dazu z.B. für $r \neq 0$ den Radialteil des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten: $\Delta\Phi(r) = (\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r)\Phi(r)$. Bedenken Sie, dass $\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r})$ ist. Es genügt hierbei, das Verhalten von $\rho(\vec{r})$ bei $r = 0$ zu erraten.

(c) Zeigen Sie, dass die Gesamtladung Null ist. Verwenden Sie dazu entweder Ihre Ergebnisse aus (a) oder aus (b).

[H9] *Spiegelladung* **[$2 + 5 + 4 = 11$ Punkte]**

Betrachten Sie eine Ladung in der Nähe einer leitenden, geerdeten Kugelschale mit Radius a und Mittelpunkt im Ursprung. Die Punktladung Q befinde sich an der Stelle $\vec{y}$, $|\vec{y}| > a$. Das Potential $\Phi(\vec{r})$ im Gebiet außerhalb der Kugel muss das Randwertproblem $\Phi(|\vec{r}| = a) = 0$ erfüllen. Anstatt uns mit der Kugelschale direkt zu befassen, führen wir eine virtuelle, zweite, Ladung Q' an einer Stelle $\vec{y}\,'$ mit $|\vec{y}\,'| < a$, also im Innern der Kugel, ein. Unser Ansatz für das Potential lautet damit

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{y}|} + \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{y}\,'|}$$

(a) Folgern Sie aus der Symmetrie des Problems, dass $\vec{y}$ und $\vec{y}\,'$ parallel zueinander sein müssen.

(b) Zur Vereinfachung setzen Sie $\vec{r} = r\vec{e}_r$ und $\vec{y} = y\vec{e}_y$, $\vec{y}\,' = y'\vec{e}_y$ mit $|\vec{e}_r| = |\vec{e}_y| = 1$. Bringen Sie damit die Randbedingung $\Phi(r = a)$ in die Form $\frac{Q}{a} = -\frac{Q'}{y'}\frac{\cdots}{\cdots}$. *Hinweis*: Es ist nützlich, $|\vec{x}| = (\vec{x}^2)^{1/2}$ zu schreiben und auszunutzen, dass $\vec{e}_r$, $\vec{e}_y$ Einheitsvektoren sind.

(c) Berechnen Sie aus der Tatsache, dass die Randbedingung (b) für alle Winkel zwischen $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_y$ gelten muss, den Ort y' und die Ladung Q' der Spiegelladung. (Wer will, kann sich für den Spezialfall $a = 1$ überlegen, wieso dies auch "Methode der reziproken Radien" genannt wird.)